解答用紙　　　　　　　　　　　　　　　名前(　　　　　　　)

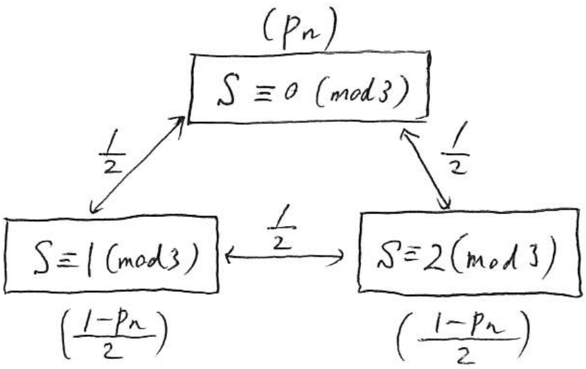
←解答する大問の番号を記入

2025 京大

Xが6で割り切れるための条件は，Xが偶数，かつ3の倍数であることである．

まず，Xが偶数であるためには一の位が2であることが必要で，このときXが3の倍数となるためには一の位を除いた$(n-1)$桁の数の和Sを3で割った余りが1であることが必要十分である．　(*)

いま，Sを3で割った余りを考えると，硬貨を1回投げるごとの状態の推移及びそれに伴う確率は下図の通り．



そこで，$S \equiv 0 \pmod 3$となる確率をp_nとすれば，対称性から$S \equiv 1, 2 \pmod 3$となる確率はともに$\frac{1-p_n}{2}$と書ける．

よって，$n \in \mathbb{N}$に対し

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-p_n}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-p_n}{2}$$

$$p_{n+1} = -\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$$

が成り立ち，$p_1 = 0$に注意してp_nを求めると

$$p_n = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

となる．

∴求める確率は，(*)で述べたことから，$n \geqq 2$のとき

$$\frac{1}{2} \times \frac{1-p_{n-1}}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(1-p_{n-1})$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$　($n=1$でも正しい．)

である．